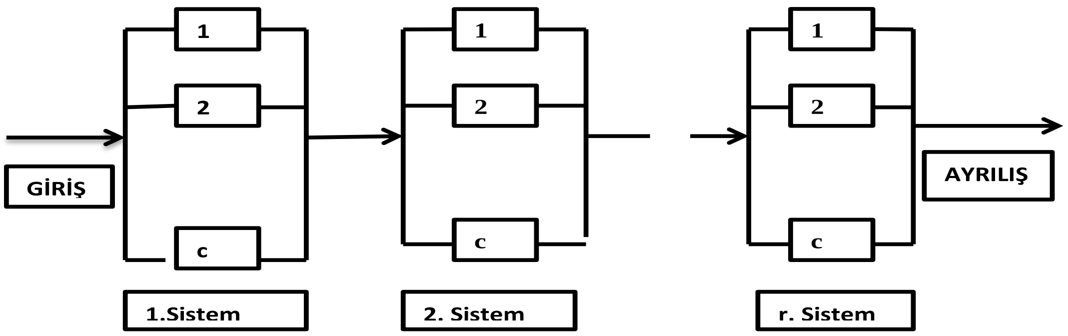
Kuyruk Teorisi(Y. L.)

12. Hafta

Seri(Tandem) Kanallı Kuyruk Modelleri

Açık Jackson Modeli

Aşağıdaki gösterilen veriler ile tanımlanan tandem kuyruk modelini göz önüne alalım.



a. Sistem, ardışık r tane $M/M/c$ tipli kuyruk sisteminden oluşur. Müşteriler sisteme λ parametreli Poisson akımı ile gelmektedir. Her bir bekleme hattında keyfi sayıda müşteri olabilir.

b. i −inci sistemin her bir kanalında hizmet süresi (η_i), μ_i parametreli üstel dağılıma sahiptir ve $\eta_1, \dots, \eta_n$'ler bağımsızdır.

c. Her bir müşteri önce 1. sistemde daha sonra 2. sistemde vb. gibi r. sistemde

Yukarıda tanımlanan model ilk kez Jackson (1954) tarafından analiz edilmiş ve alt sistemlerdeki müşteri sayılarının bağımsız olduğu açıklanmıştır. Jackson teoremini ifade etmek için aşağıdaki österimleri ifade edelim.

$N_k(t), t$ anında$k$-ıncı sistemde bulunan müşteri sayısı olsun.

$$P(N_k(t) = n_k) = p_{n_k}(t)(k = 1, \dots, r\,; n_k = 0,1, \dots,)$$

$$P(N_1(t) = n_1, \dots, N_r(t) = n_r) = P_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t)$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} P_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t) = p_{n_1,n_2,\dots,n_r}$$

Teorem(Jackson). $\min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) > \lambda$ koşulu altında

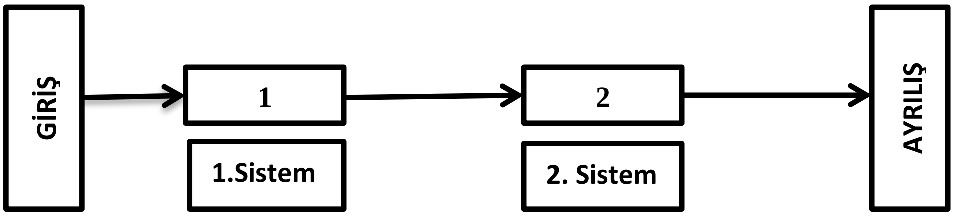
$$\lim_{t\to\infty} p_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t) = p_{n_1,n_2,\dots,n_r}$$

limiti vardır ve

$$p_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = p_{n_1}.p_{n_2}.\ldots.p_{n_r}(n_1 \geq 0, \ldots, n_r \geq 0)$$

Jackson teoremini r=2 ve c=1 durumu için ifade edelim ve ispatlayalım. Genel duru için ispat benzer yolla yapılır.

İspat:



Önce $p_{n_1,n_2}(t)$ olasılıkları için diferansiyel denklemleri kuralım.

$$p'_{0,0}(t) = -\lambda p_{0,0}(t) + \mu_2 p_{0,1}(t), \quad n_1 = n_2 = 0,$$

$$p'_{n_{1,0}}(t) = -(\lambda + \mu_1)p_{n_{1,0}}(t) + \lambda p_{n_1-1,0}(t) + \mu_2 p_{n_{1,1}}(t), \qquad n_1 > 0, n_2 = 0,$$

$$p'_{0,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_2)p_{0,n_2}(t) + \mu_1 p_{1,n_2-1}(t) + \mu_2 p_{0,n_2+1}(t),$$

$$n_2 > 0, n_1 = 0,$$

$$p'_{n_1,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)p_{n_1,n_2}(t) + \lambda p_{n_1-1,n_2}(t) + \mu_1 p_{n_1+1,n_2-1}(t) + \mu_2 p_{n_1,n_2+1}(t), n_2 > 0, n_1 > 0,$$

Bu denklem sisteminde $t \to \infty$koşulu altında limit alırsak

$$0 = -\lambda p_{0,0} + \mu_2 p_{0,1}, \quad n_1 = n_2 = 0,$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1)p_{n_{1,0}} + \lambda p_{n_1-1,0} + \mu_2 p_{n_{1,1}}, \qquad n_1 > 0, n_2 = 0,$$

$$0 = -(\lambda + \mu_2)p_{0,n_2} + \mu_1 p_{1,n_2-1} + \mu_2 p_{0,n_2+1}, n_2 > 0, n_1 = 0,$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)p_{n_1,n_2} + \lambda p_{n_1-1,n_2} + \mu_1 p_{n_1+1,n_2-1} + \mu_2 p_{n_1,n_2+1}, \qquad n_2 > 0, n_1 > 0,$$

Denklem sistemini elde ederiz. Denklem sisteminin çözümü,

$$p_{n_1,n_2} = {\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}p_{0,0} \quad , n_2 \geq 0, n_1 \geq 0$$

formülü elde edilir. Burada $\rho_1 = {}^{\lambda}/_{\mu_1}, \rho_2 = {}^{\lambda}/_{\mu_2}$ dir. Bütün olasılıkları $p_{0,0}$(sistemin boş olması olasılığı) türünden yazılmıştır. Bilinmeyen $p_{0,0}$ olsılığını

$\sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty} p_{n_1,n_2} = 1$ ergodiklik koşulundan bulunur.

$\sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty} p_{n_1,n_2} = \sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty} {\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}p_{0,0} = 1$

$$p_{0,0}\left(\frac{1}{1-\rho_1}\right)\left(\frac{1}{1-\rho_2}\right)=1$$

buradan

$$p_{0,0}=(1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

böylece

$$p_{n_1,n_2}={\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2), n_2\geq 0, n_1\geq 0$$

bulunur. Buradan marjinal olasılıklar hesaplanırsa

$p_{n_1}=\sum_{n_2=0}^{\infty}p_{n_1,n_2}=\sum_{n_2=0}^{\infty}{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2)$

$$p_{n_1}={\rho_1}^{n_1}(1-\rho_1)$$

$p_{n_2}=\sum_{n_1=0}^{\infty}p_{n_1,n_2}=\sum_{n_1=0}^{\infty}{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2)$

$$p_{n_2}={\rho_2}^{n_2}(1-\rho_2)$$

bulunur. Böylece

$$p_{n_1,n_2}=p_{n_1}p_{n_2}$$

olduğu görülür. Yani alt sistemlerdeki müşteri sayıları bağımsızdır.

Performans Ölçüleri

a. Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

$$L=E(N_1,N_2)=\sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty}(n_1+n_2)p_{n_1,n_2}$$

$$=\sum_{n_1}^{\infty}\sum_{n_2}^{\infty}(n_1+n_2){\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

$$=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

olarak bulunur.

b. Kuyruktaki Ortalama Müşteri Sayısı

Kuyrukta bekleyen müşterilerin ortalama sayısı

$Q=Q_1+Q_2$dir. Burada Q_1 ve Q_2 sırası ile 1-inci ve 2-nci kanalın önünde bekleyen müşteri sayısıdır. M/M/1 sisteminde ortalama müşteri sayısı formülü kullanıldığında,

$Q_1=\frac{{\rho_1}^2}{1-\rho_1}veQ_2=\frac{{\rho_2}^2}{1-\rho_2}$ elde ederiz. Böylece

$$Q=Q_1+Q_2=\frac{{\rho_1}^2}{1-\rho_1}+\frac{{\rho_2}^2}{1-\rho_2}$$

bulunur.

c. Sistemde Ortalama Kalma Süresi

Sistemde kalma süresi, ilk kanal önündeki kuyruğa giriş anı ile ikinci kanaldaki hizmetin bitiş anı arasındaki süredir.

T_1: Bir müşterinin 1-inci sistemde kalma süresi

T_2: Bir müşterinin 2-nci sistemde kalma süresi

T_1veT_2'yi aşağıdaki biçimde gösterelim.

$$T_1 = X_1{}' + X_2 + \cdots + X_{N_1+1}, \;\; T_2 = Y_1{}' + Y_2 + \cdots + Y_{N_2+1}$$

Burada, $X_i \sim \exp(\mu_1)$ve $Y_i \sim \exp(\mu_2)$ dir. $X_i$veY_i'ler bağımsızdır.

N_1veN_2 sırasıyla 1-inci ve 2-nci sistemdeki müşteri sayısı olmak üzere Jackson teoremine göre;

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = p_{n_{1,}n_2} = \rho_1{}^{n_1}\rho_2{}^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2), \; n_{1,2} \geq 0$$

Teorem: T_1 ve T_2 bağımsız tesadüfi değişkenlerdir.

İspat: (T_1, T_2)' nin Laplace dönüşümü $\varphi(u,v), T_1$ ile $T_2{}'$ nin Laplace dönüşümleri sırasıyla $\varphi_1(u)$ ve $\varphi_2(v)$ olsun.T_1 ve T_2'nin bağımsız olduğunu göstermek için;

$$\varphi(u,v) = \varphi_1(u).\varphi_2(v)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\varphi(u,v) = E(e^{-uT_1}.e^{-vT_2})$$

dir. Tam olasılık teoremi gereğince

$$\varphi(u,v) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} E(e^{-uT_1}.e^{-vT_2}/N_1 = n_1, N_2 = n_2)\,p_{n_1 n_2}$$

$$= \textstyle\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} E\left[e^{-u(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1+1})}.e^{-v(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n_2+1})}\right]\rho_1{}^{n_1}\rho_2{}^{n_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

$$\varphi(u,v) = \sum_{n_1=0}^{\infty} E\left[e^{-u(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1+1})}\right]\rho_1{}^{n_1}(1-\rho_1)\sum_{n_2=0}^{\infty} E\left[e^{-v(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n_2+1})}\right]\rho_2{}^{n_2}(1-\rho_2)$$

Her bir X_i ve Y_i'nin Laplace dönüşümü

$$E(e^{-uX_i}) = \frac{\mu_1}{\mu_1+u}, \quad E(e^{-vY_i}) = \frac{\mu_2}{\mu_2+u}$$

dir. Hem X_i'ler, hem de Y_i'ler bağımsız olduğundan

$$E\left[e^{-v(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n_2+1})}\right] = \left(\frac{\mu_2}{\mu_2+v}\right)^{n_2+1}$$

$$E\left[e^{-u\left(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1+1}\right)}\right] = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+u}\right)^{n_1+1}$$

olduğundan

$$\varphi(u,v) = \sum_{n_1}^{\infty}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+u}\right)^{n_1+1} {\rho_1}^{n_1}(1-\rho_1)\sum_{n_2}^{\infty}\left(\frac{\mu_2}{\mu_2+v}\right)^{n_2+1} {\rho_2}^{n_2}(1-\rho_2)$$

$$= (1-\rho_1)\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+u}\right)\sum_{n_1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+u}\right)^{n_1}(1-\rho_2)\left(\frac{\mu_2}{\mu_2+v}\right)\sum_{n_2}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_2+v}\right)^{n_2}$$

$$\varphi(u,v) = \left[\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1-\lambda+u}\right]\left[\frac{\mu_2-\lambda}{\mu_2-\lambda+v}\right]$$

olur. Burada $v=0$ alınırsa,

$$\varphi_1(u)=\varphi(u,0) = \left[\frac{\mu_1-\lambda}{\mu_1-\lambda+u}\right]$$

$u=0$ alınırsa,

$$\varphi_2(v)=\varphi(0,v) = \left[\frac{\mu_2-\lambda}{\mu_2-\lambda+v}\right]$$

Böylece

$$\varphi(u,v) = \varphi_1(u).\varphi_2(v)$$

T_1 ‘in dağılım fonksiyonu

$$P(T_1<x) = \begin{cases} 1-e^{-(\mu_1-\lambda)t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

ve ortalaması

$$E(T_1) = \frac{1}{\mu_1-\lambda}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$P(T_2<y) = \begin{cases} 1-e^{-(\mu_2-\lambda)t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

ortalaması

$$E(T_2) = \frac{1}{\mu_2-\lambda}$$

bulunur.

Sistemdeki ortalama kalma süresi $T=T_1+T_2$ olduğundan

$$E(T) = E(T_1+T_2) = E(T_1)+E(T_2) = \frac{1}{\mu_1-\lambda}+\frac{1}{\mu_2-\lambda}$$

bulunur. Görülüyor ki sistemde ortalama kalma süresi $\mu_1 - \lambda$ ve $\mu_2 - \lambda$ parametreleri ile hipoüstel dağılım göstermektedir. Böylece bu sistem için momentler hesaplanabilir.

$$E[X] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

$$E[X^2] = \frac{2}{(\mu_1 - \lambda)^2} + \frac{2}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)} + \frac{2}{(\mu_2 - \lambda)^2}$$

$$\vdots$$

$$E(X^k) = \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)^k} + \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)^{(k-1)}(\mu_2 - \lambda)} + \cdots + \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)^{(k-1)}} + \frac{k!}{(\mu_2 - \lambda)^k}$$

Bu momentler yardımıyla bekleme süresinin varyansı, çarpıklığı ve basıklığı kolayca hesaplana bilir.

d. Kuyrukta Ortalama Kalma Süresi

Birinci kuyrukta ve ikinci kuyrukta bir müşterinin ortalama bekleme süresi sırasıyla W_1 ve W_2 olsun. Bir müşterinin servislerde ortalama hizmet süreleri

$E(X_i) = {}^1/_{\mu_1}$ ve $E(Y_i) = {}^1/_{\mu_2}$ dir.

$$W_1 = T_1 - X_i$$

$$E(W_1) = E(T_1 - X_i) = E(T_1) - E(X_i) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} - \frac{1}{\mu_1} = \frac{\rho_1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1}$$

Benzer yolla

$$E(W_2) = E(T_2 - Y_i) = E(T_2) - E(Y_i) = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} - \frac{1}{\mu_2} = \frac{\rho_2}{\mu_2 - \lambda} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}$$

Böylece

$$E(W) = E(W_1 + W_2) = E(W_1) + E(W_2) = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}$$

Jackson Modelinde Ortalama Kalma Süresinin Optimizasyonu

2 tane ardışık M/M/1 sisteminden oluşan Jackson modelini göz önüne alalım

Müşterinin 1-inci ve 2-nci alt sisteminde ortalama kalma süresi sırasıyla ${}^1/_{\mu_1 - \lambda}$,

${}^1/_{\mu_2 - \lambda}$olduğundan bu müşterilerin sistemde ortalama kalma süresi

$$E(T) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

olacaktır. $\mu_1 + \mu_2 = c$ (sabit) koşulu altında $E(T)$'nin minimizasyon problemini çözelim. Bunun için aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasındaki

$$A.O \geq G.O$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq (x_1.x_2)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini kullanalım

Burada x_1 yerine $^1/_{\mu_1 - \lambda}$ ve x_2 yerine $^1/_{\mu_2 - \lambda}$ yazılırsa;

$$\frac{\frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}}{2} \geq \left[\left(\frac{1}{\mu_1 - \lambda}\right)\left(\frac{1}{\mu_2 - \lambda}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E(T) \geq 2\frac{1}{\sqrt{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)}}$$

Benzer şekilde x_1 yerine $\mu_1 - \lambda$ vex_2 yerine $\mu_2 - \lambda$ yazılırsa

$$\frac{(\mu_1 - \lambda) + (\mu_2 - \lambda)}{2} \geq [(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{C - 2\lambda}{2} \geq \sqrt{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)}$$

$$E(T) \geq \frac{4}{c - 2\lambda}$$

olur.

Burada görülüyor ki $E(T)$'nin alabileceği en küçük değer $4/c - 2\lambda$ dır.
$E(T)$fonksiyonu $\mu_1 + \mu_2 = c$ koşulu altında en küçük değerini

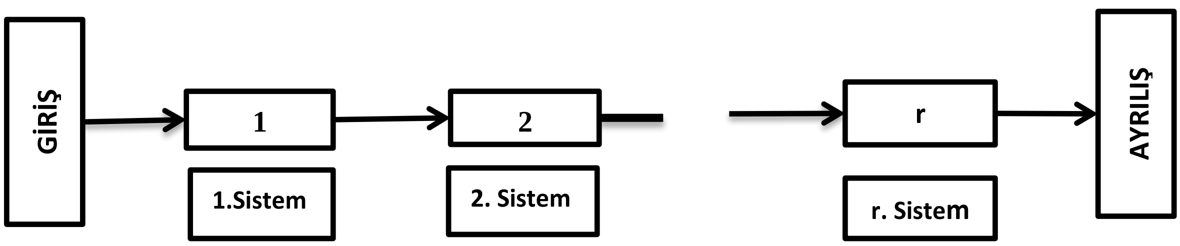
$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{c}{2}$$

olduğunda alır.

$$minE(T) = \frac{4}{c - 2\lambda}$$

olur.

Bu durum r tane ardışık M/M/1 sistemi içinde gösterile bilir.



$$E(T) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \cdots + \frac{1}{\mu_r - \lambda}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_r}{r} \geq [x_1 . x_2 \ldots x_r]^{\frac{1}{r}}$$

$\mu_1 + \cdots + \mu_2 = c$ (sabit) koşulu altında $E(T)$'nin minimum değeri benzer yolla incelendiğinde

$$E(T) \geq \frac{r^2}{c - r\lambda}$$

olur. $E(T)$' nin minimumu olan ${r^2}/{c - r\lambda}$ değerini $\mu_1 = \cdots = \mu_r = \frac{c}{r}$ olduğunda alır.